Differenziation

differenzierbar in x_0: für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D\setminus\{x_0\}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

$$y_n = \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$$

konvergiert und der Grenzwert ist derselbe für alle Folgen

Differenzenquotient

Dieser Grenzwert ist die Ableitung von f in x_0

differenzierbar: in jedem $x_0 \in D$ differenzierbar

Funktion → Ableitungsfunktion

Tangentengleichung

$$t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Steigung}} \cdot (x-x_0) + \underbrace{f(x_0)}_{\text{Funktionswert}}$$

Minimalstelle } $f'=0$ { $f''>0$

Maximalstelle } $f'=0$ { $f''<0$

globales Maximum (bzw. Minimum) von $f: D\to\mathbb{R}$:
Maximum (bzw. Minimum) des Bildes $f(D)\subseteq\mathbb{R}$

globale Maximalstelle (bzw. Minimalstelle) $f(x) = \max f(D)$ $(=\min f(D))$

lokale Maximalstelle (bzw. Minimalstelle):
es existiert ein Intervall $I=(a,b)\subset D$, $x\in I$, sodass
$f(x) = \max f(I)$ $(=\min f(I))$

n-mal differenzierbar: $f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}$ existieren

n-mal stetig differenzierbar: n-mal differenzierbar u. $f, f', f'', \ldots$ stetig

Integration I

Für Intervall $\boxed{I = [a,b] \subset \mathbb{R}}$ für $\boxed{f: I \to \mathbb{R}}$

Bestimmtes Integral:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n}, \text{ wo}$$

$$\boxed{S_n = \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\text{Breite}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)}_{\text{Höhe}}}$$

„$\int(a+b) = \int a + \int b$"

„$\int(c\cdot a) = c \cdot \int a$" → Integral ist linear (a, b Funktionen)

Stammfunktion F zu f: $\boxed{F' = f}$

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$\boxed{f: [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}}$

$\Rightarrow \boxed{F: [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt}$ ist Stammfunktion,

anderes Stammfkt.: $\boxed{\tilde{F} = F + c}$, $c \in \mathbb{R}$

für jede $\tilde{F}$ und jedes $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$ gilt

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \tilde{F}(\beta) - \tilde{F}(\alpha)}$$

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx} \qquad \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}, \quad c \in [a,b]$$

Integration II

$f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Fkts

$$\Rightarrow \boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'} \rightarrow \text{(Produktregel)}$$

$$\boxed{\int_a^b f' \cdot g \, dx = (f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a) - \int_a^b f \cdot g' \, dx}$$

→ Partielle Integration „integration by parts"

Bsp.: $\int_0^1 x \cdot e^x \, dx$

$f(x) = x \qquad g'(x) = e^x$

$f'(x) = 1 \qquad g(x) = e^x (+c)$

$$\int_0^1 f \cdot g' \, dx = (f \cdot g)(1) - (f \cdot g)(0) - \int_0^1 f' \cdot g \, dx$$

$$= 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - \int_0^1 1 \cdot e^x dx$$

$$= e - 0 - \left(e^x \Big|_0^1\right)$$

$$= e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = \underline{\underline{1}}$$

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)} \rightarrow \text{(Kettenregel)}$$

$$\boxed{\int_a^b g'(f(x)) \cdot f'(x) \, dx = g(f(b)) - g(f(a)) = \int_{f(a)}^{f(b)} g'(t) \, dt}$$

→ Substitutionsregel „integration by substitution"

Integration III

integration by substitution

Bsp: $\int_0^1 x \cdot e^{x^2}\,dx$

$(e^{x^2})' = 2x \cdot e^{x^2} \rightarrow$ fast der Integrand

Setze $g(t) = e^t$, $f(x) = x^2$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = e^{x^2}$

$(g \circ f)'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$

Also $\int_0^1 x \cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \underbrace{2 \cdot x \cdot e^{x^2}}_{(g \circ f)'}\,dx$

$= \frac{1}{2} \cdot [g \circ f]_0^1$

$= \frac{1}{2} \cdot [e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot (e - 1)$